ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρεθεί με τη μέθοδο Euler η λύση του ΠΑΤ

y' = x / y, x∈[0, 1]

y (0) = 1

με ακρίβεια 4 ψηφίων και βήμα 0.2 στο x = 1

ΛΥΣΗ

Ας βρούμε αρχικά την αναλυτική λύση με χρήση της DSolve

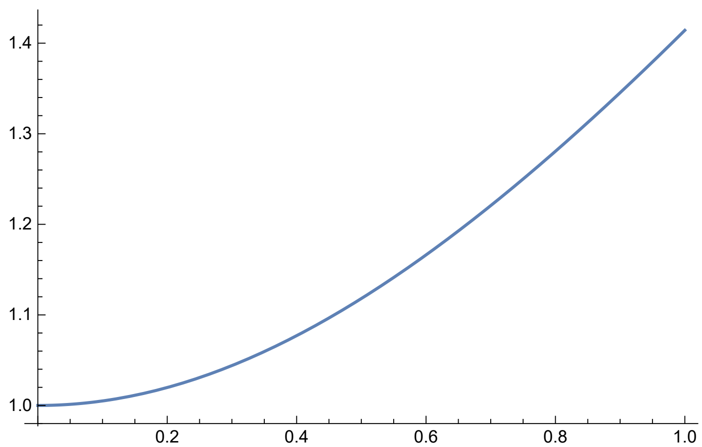
```
y = DSolve[{y'[x] == x / y[x], y[0] == 1}, y[x], {x, 0, 1}][[1, 1, 2]]
```

DSolve::bvnul : For some branches of the general solution, the given boundary conditions lead to an empty solution. ≫

$\sqrt{1 + x^2}$

Με γράφημα :

```
Plot[y, {x, 0, 1}]
```



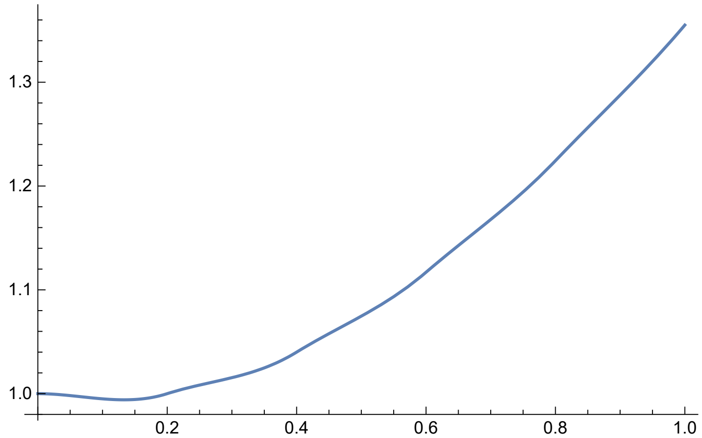
Πάμε να βρούμε και την αριθμητική λύση με την NDSolve :

```
z = NDSolve[{z'[x] == x / z[x], z[0] == 1}, z, {x, 0, 1},
   WorkingPrecision → 5, Method → {"FixedStep", Method → "ExplicitEuler"},
   StartingStepSize → 0.2, MaxStepFraction → 0.2][[1, 1, 2]]
```

InterpolatingFunction[Domain: {{0, 1.0000}} Output: scalar]

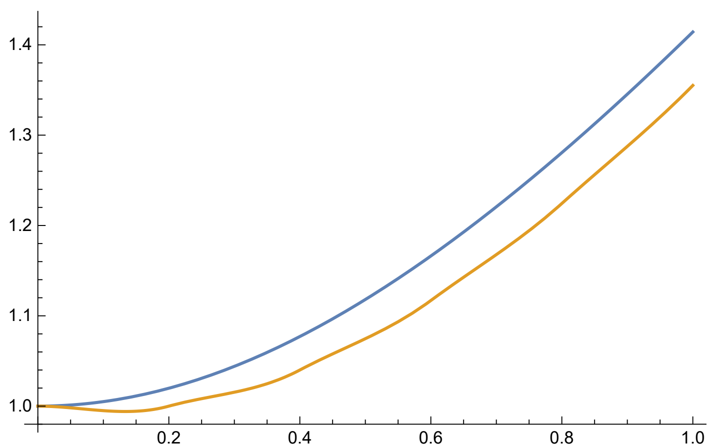
Γραφηκά :

```
Plot[Evaluate[z[x]], {x, 0, 1}]
```



Αν τις παραστήσω μαζί βλέπουμε και τη διαφορά
στη προσέγγισή μας (με μπλέ είναι η αναλυτική λύση)

```
Plot[{y, Evaluate[z[x]]}, {x, 0, 1}]
```



Οι τιμές τους στο 1 είναι :

```
N[y /. x -> 1, 5]
```

```
1.4142
```

```
z[1]
```

```
1.3550
```

Άρα έχουμε σφάλμα :

```
e = N[y /. x -> 1, 5] - z[1]
```

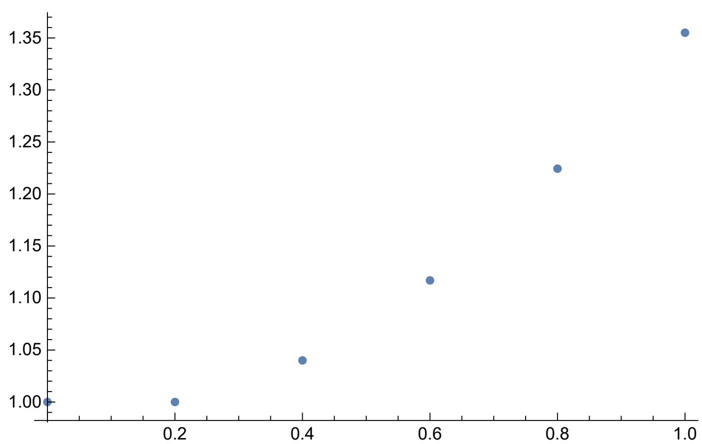
```
0.0592
```

Αν το υπολογίσουμε προγραμματίζοντας οι ίδιοι την **Euler** *θα καταλήξουμε σε ίδια αποτελέσματα απλά σε λίγα μόνο σημεία.Με άμεση* **Euler** *το ΠΑΤ θα γίνει :*

```
Clear[z];
h = 0.2; (*βήμα*)
nmax = IntegerPart[1/h]; (*O αριθμός των διαμερήσεων(εδώ α-β/h άρα 5)*)
euler1 = RecurrenceTable[{z[n + 1] == z[n] + h * (n * h / z[n]), z[0] == 1}, z, {n, 0, nmax}];
(*υπολογισμός τιμών σύμφωνα με το τύπο της μεθόδου*)
J = Range[0, 1, 0.2];
(*τα 2 τελευταία γίνονται για να μπορέσουμε να δούμε γραφηκά τη προσέγγιση*)
z1 = Table[{J[[i]], euler1[[i]]}, {i, 6}]
```

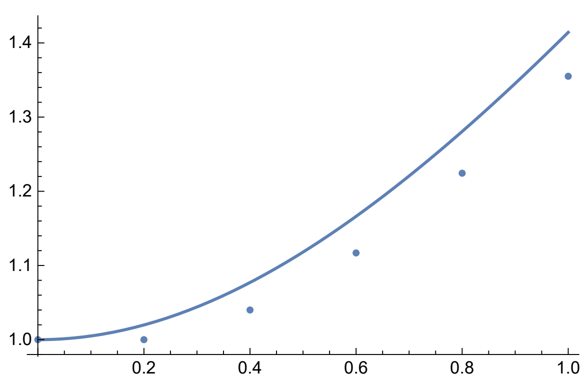
```
{{0., 1.}, {0.2, 1.}, {0.4, 1.04}, {0.6, 1.11692}, {0.8, 1.22436}, {1., 1.35504}}
```

```
ListPlot[z1]
```



Στο ίδιο διάγραμμα η αναλυτική και οι τιμές που υπολογίσαμε εμείς στην **Euler**

```
Show[Plot[y, {x, 0, 1}], ListPlot[z1]]
```



ΑΣΚΗΣΗ 6

Θεωρούμε το ΠΑΤ

y' = 10 y (1 - y / 1000), tε[0, 2]

y (0) = 100

Με την άμεση Euler να βρεθούν οι προσεγγίσεις με βήμα 0.1 , 0.15 , 0.2 και 0.25 και να συγκριθούν με την αναλυτική λύση.

ΛΥΣΗ

Πάμε αρχικά να βρούμε την αναλυτική λύση

```
y = DSolve[{y'[t] == 10 y[t] * (1 - y[t] / 1000), y[0] == 100}, y[t], t][[1, 1, 2]]
```

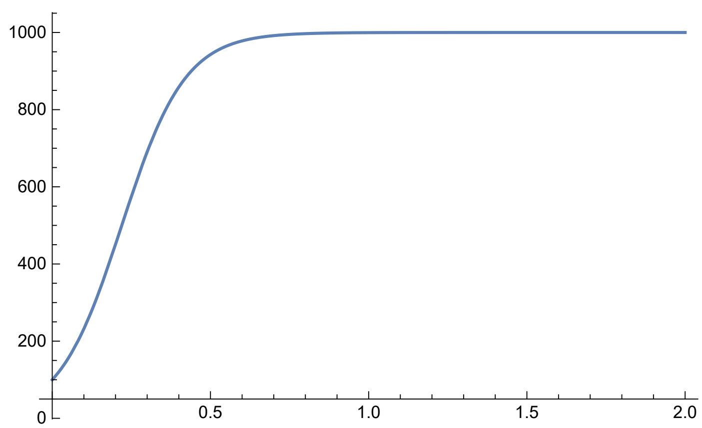
Solve::ifun :

Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

$$\frac{1000\, e^{10 t}}{9 + e^{10 t}}$$

Γραφηκά είναι η εξής :

```
Plot[y, {t, 0, 2}, PlotRange → All]
```



Όπως και στην άσκηση 1 μπορούμε να βρούμε τις τιμές με NDSolve και με δικό μας προγραμματισμό της μεθόδου. Προγραμματίζουμε εμείς τη μέθοδο για τα 4 διαφορετικά βήματα

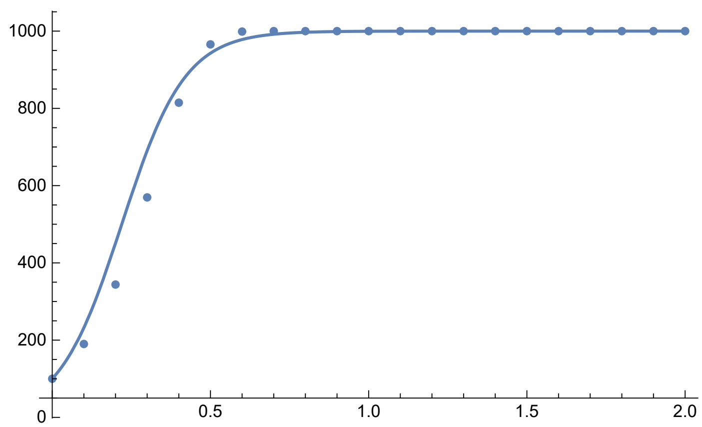
Για 0.1

```
h = 0.1; (*το βήμα*)
nmax = IntegerPart[2 / h]; (*αριθμός διαμερήσεων β-α/h*)
euler1 = RecurrenceTable[{z[n + 1] == z[n] + h * 10 z[n] * (1 - z[n] / 1000), z[0] == 100},
    z, {n, 0, nmax}]; (*ο τύπος της μεθόδου*)
J1 = Range[0, 2, h];
z1 = Table[{J1[[i]], euler1[[i]]}, {i, nmax + 1}]
```

```
{{0., 100.}, {0.1, 190.}, {0.2, 343.9}, {0.3, 569.533}, {0.4, 814.698},
 {0.5, 965.663}, {0.6, 998.821}, {0.7, 999.999}, {0.8, 1000.}, {0.9, 1000.},
 {1., 1000.}, {1.1, 1000.}, {1.2, 1000.}, {1.3, 1000.}, {1.4, 1000.}, {1.5, 1000.},
 {1.6, 1000.}, {1.7, 1000.}, {1.8, 1000.}, {1.9, 1000.}, {2., 1000.}}
```

Γραφηκά και σε σχέση με την αναλυτική λύση έχουμε

```
Show[Plot[y, {t, 0, 2}, PlotRange → All], ListPlot[z1]]
```

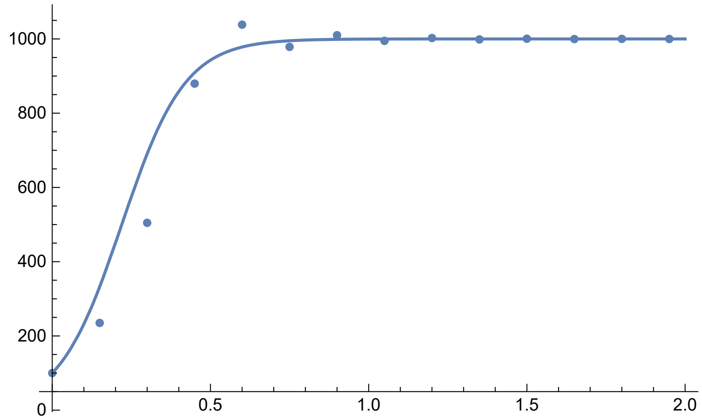


Για 0.15

```
h = 0.15; (*το βήμα*)
nmax = IntegerPart[2 / h]; (*αριθμός διαμερήσεων β-α/h*)
euler2 = RecurrenceTable[{z[n + 1] == z[n] + h * 10 z[n] * (1 - z[n] / 1000), z[0] == 100},
    z, {n, 0, nmax}]; (*ο τύπος της μεθόδου*)
J2 = Range[0, 2, h];
z2 = Table[{J2[[i]], euler2[[i]]}, {i, nmax + 1}]
```

```
{{0., 100.}, {0.15, 235.}, {0.3, 504.662}, {0.45, 879.63}, {0.6, 1038.45},
 {0.75, 978.556}, {0.9, 1010.03}, {1.05, 994.833}, {1.2, 1002.54},
 {1.35, 998.719}, {1.5, 1000.64}, {1.65, 999.68}, {1.8, 1000.16}, {1.95, 999.92}}
```

```
Show[Plot[y, {t, 0, 2}, PlotRange → All], ListPlot[z2]]
```

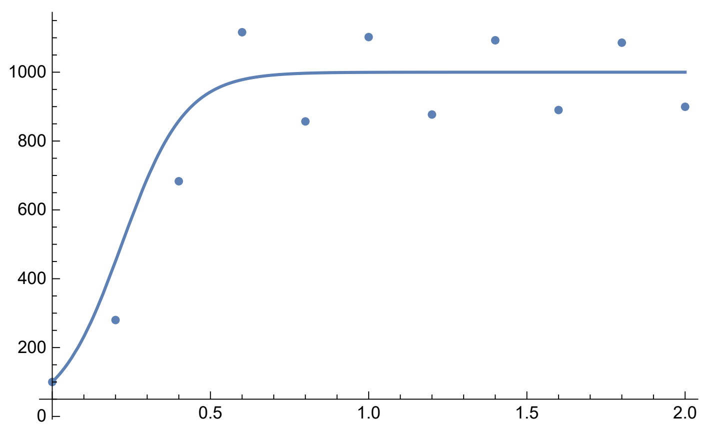


Για 0.2

```
h = 0.2;(*το βήμα*)
nmax = IntegerPart[2/h];(*αριθμός διαμερήσεων β-α/h*)
euler3 = RecurrenceTable[{z[n+1] == z[n] + h * 10 z[n] * (1 - z[n]/1000), z[0] == 100},
    z, {n, 0, nmax}];(*ο τύπος της μεθόδου*)
J3 = Range[0, 2, h];
z3 = Table[{J3[[i]], euler3[[i]]}, {i, nmax + 1}]
```

```
{{0., 100.}, {0.2, 280.}, {0.4, 683.2}, {0.6, 1116.08}, {0.8, 856.977}, {1., 1102.11},
 {1.2, 877.035}, {1.4, 1092.72}, {1.6, 890.08}, {1.8, 1085.76}, {2., 899.537}}
```

```
Show[Plot[y, {t, 0, 2}, PlotRange → All], ListPlot[z3]]
```

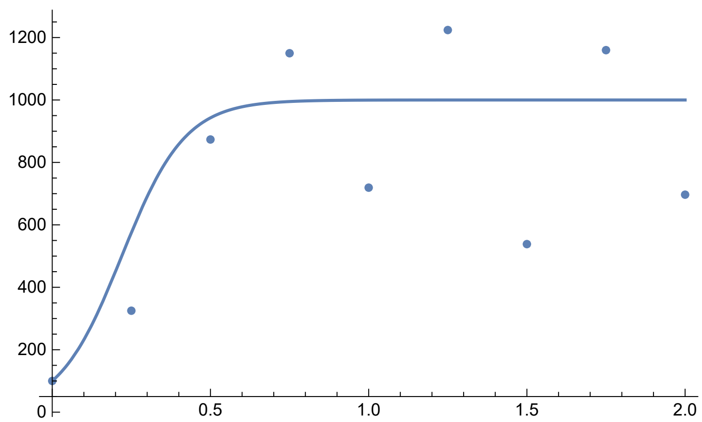


Για 0.25

```
h = 0.25;(*το βήμα*)
nmax = IntegerPart[2/h];(*αριθμός διαμερήσεων β-α/h*)
euler4 = RecurrenceTable[{z[n+1] == z[n] + h*10 z[n] * (1 - z[n]/1000), z[0] == 100},
    z, {n, 0, nmax}];(*ο τύπος της μεθόδου*)
J4 = Range[0, 2, h];
z4 = Table[{J4[[i]], euler4[[i]]}, {i, nmax + 1}]
```

```
{{0., 100.}, {0.25, 325.}, {0.5, 873.438}, {0.75, 1149.8}, {1., 719.203},
 {1.25, 1224.08}, {1.5, 538.355}, {1.75, 1159.68}, {2., 696.741}}
```

```
Show[Plot[y, {t, 0, 2}, PlotRange → All], ListPlot[z4]]
```



Παρατηρούμε λοιπόν οτι όσο το βήμα μεγαλώνει οι προσεγγίσεις είναι ολοένα και χειρότερες το οποίο ήταν αναμενώμενο αφού η άμεση **Euler** είναι συνεπής για **h** → 0

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογιστεί η λύση του ΠΑΤ :

$$y'(t) = \lambda y(t),\ t \geq 0$$
$$y(0) = 1$$

για ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα 0.1 με τις μεθόσους της άμεσης και πεπλεγμένης Euler και τη μέθοδο Τραπεζίου. Θεωρήστε ότι **λ < 0.** Ποιές οι περιοχές απόλυτης ευστάθειας της κάθε μεθόδου για το λ που επιλέξατε ? Να βρεθούν οι προσεγγίσεις με κάθε μέθοδο και να υπολογιστεί το μέγιστο τοπικό σφάλμα της καθε μίας.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε μια ομοιόμορφη διαμέρηση με βήμα 0.1 απο 0 εως 10. Άρα :

```
tmax = 10;
h = 0.1;
n = Range[0, tmax / h];
```

Γνωρίζουμε απο τη θεωρία τις λύσεις του προβλήματος δοκιμής για την άμεση Euler (σελ 47), τη πεπλεγμένη (σελ 57) και του τραπεζίου (σημειώσεις). Αυτές είναι αντίστοιχα οι εξής :

```
yexpl = (1 + h * λ) ^n;
yimp = (1 - λ * h) ^ (-n);
ytrap = ((2 + λ * h) / (2 - h * λ)) ^n;
```

Και η γενική λύση του ΠΑΤ είναι :

```
y = E^ (λ * h * n);
```

Ας θεωρήσουμε ως λ = -1. Τότε μπορούμε απο τη θεωρία να υπολογίσουμε τις περιοχές απόλυτης ευστάθειας των μεθόδων. Ας βρούμε εδω τις προσεγγίσεις για λ = -1

```
λ = -1;
```

Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

```
y
{1., 0.904837, 0.818731, 0.740818, 0.67032, 0.606531, 0.548812, 0.496585, 0.449329,
 0.40657, 0.367879, 0.332871, 0.301194, 0.272532, 0.246597, 0.22313, 0.201897,
 0.182684, 0.165299, 0.149569, 0.135335, 0.122456, 0.110803, 0.100259, 0.090718,
 0.082085, 0.0742736, 0.0672055, 0.0608101, 0.0550232, 0.0497871, 0.0450492,
 0.0407622, 0.0368832, 0.0333733, 0.0301974, 0.0273237, 0.0247235, 0.0223708,
 0.0202419, 0.0183156, 0.0165727, 0.0149956, 0.0135686, 0.0122773, 0.011109,
 0.0100518, 0.00909528, 0.00822975, 0.00744658, 0.00673795, 0.00609675, 0.00551656,
 0.00499159, 0.00451658, 0.00408677, 0.00369786, 0.00334597, 0.00302755,
 0.00273944, 0.00247875, 0.00224287, 0.00202943, 0.0018363, 0.00166156, 0.00150344,
 0.00136037, 0.00123091, 0.00111378, 0.00100779, 0.000911882, 0.000825105,
 0.000746586, 0.000675539, 0.000611253, 0.000553084, 0.000500451, 0.000452827,
 0.000409735, 0.000370744, 0.000335463, 0.000303539, 0.000274654, 0.000248517,
 0.000224867, 0.000203468, 0.000184106, 0.000166586, 0.000150733, 0.000136389,
 0.00012341, 0.000111666, 0.000101039, 0.0000914242, 0.0000827241, 0.0000748518,
 0.0000677287, 0.0000612835, 0.0000554516, 0.0000501747, 0.0000453999}
```

ΜΕ ΑΜΕΣΗ EULER

```
yexpl
{1, 0.9, 0.81, 0.729, 0.6561, 0.59049, 0.531441, 0.478297, 0.430467, 0.38742, 0.348678,
 0.313811, 0.28243, 0.254187, 0.228768, 0.205891, 0.185302, 0.166772, 0.150095,
 0.135085, 0.121577, 0.109419, 0.0984771, 0.0886294, 0.0797664, 0.0717898,
 0.0646108, 0.0581497, 0.0523348, 0.0471013, 0.0423912, 0.038152, 0.0343368,
 0.0309032, 0.0278128, 0.0250316, 0.0225284, 0.0202756, 0.018248, 0.0164232,
 0.0147809, 0.0133028, 0.0119725, 0.0107753, 0.00969774, 0.00872796, 0.00785517,
 0.00706965, 0.00636269, 0.00572642, 0.00515378, 0.0046384, 0.00417456, 0.0037571,
 0.00338139, 0.00304325, 0.00273893, 0.00246503, 0.00221853, 0.00199668,
 0.00179701, 0.00161731, 0.00145558, 0.00131002, 0.00117902, 0.00106112,
 0.000955005, 0.000859504, 0.000773554, 0.000696199, 0.000626579, 0.000563921,
 0.000507529, 0.000456776, 0.000411098, 0.000369988, 0.00033299, 0.000299691,
 0.000269722, 0.000242749, 0.000218475, 0.000196627, 0.000176964, 0.000159268,
 0.000143341, 0.000129007, 0.000116106, 0.000104496, 0.0000940461, 0.0000846415,
 0.0000761773, 0.0000685596, 0.0000617037, 0.0000555333, 0.00004998, 0.000044982,
 0.0000404838, 0.0000364354, 0.0000327919, 0.0000295127, 0.0000265614}
```

ΜΕ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ EULER

yimp

{1, 0.909091, 0.826446, 0.751315, 0.683013, 0.620921, 0.564474, 0.513158, 0.466507, 0.424098, 0.385543, 0.350494, 0.318631, 0.289664, 0.263331, 0.239392, 0.217629, 0.197845, 0.179859, 0.163508, 0.148644, 0.135131, 0.122846, 0.111678, 0.101526, 0.092296, 0.0839055, 0.0762777, 0.0693433, 0.0630394, 0.0573086, 0.0520987, 0.0473624, 0.0430568, 0.0391425, 0.0355841, 0.0323492, 0.0294083, 0.0267349, 0.0243044, 0.0220949, 0.0200863, 0.0182603, 0.0166002, 0.0150911, 0.0137192, 0.012472, 0.0113382, 0.0103074, 0.00937041, 0.00851855, 0.00774414, 0.00704013, 0.00640011, 0.00581829, 0.00528935, 0.0048085, 0.00437136, 0.00397397, 0.0036127, 0.00328427, 0.0029857, 0.00271427, 0.00246752, 0.0022432, 0.00203927, 0.00185388, 0.00168535, 0.00153214, 0.00139285, 0.00126623, 0.00115112, 0.00104647, 0.000951336, 0.000864851, 0.000786228, 0.000714753, 0.000649775, 0.000590705, 0.000537004, 0.000488186, 0.000443805, 0.000403459, 0.000366781, 0.000333438, 0.000303125, 0.000275568, 0.000250517, 0.000227742, 0.000207038, 0.000188217, 0.000171106, 0.000155551, 0.00014141, 0.000128555, 0.000116868, 0.000106243, 0.000096585, 0.0000878045, 0.0000798223, 0.0000725657}

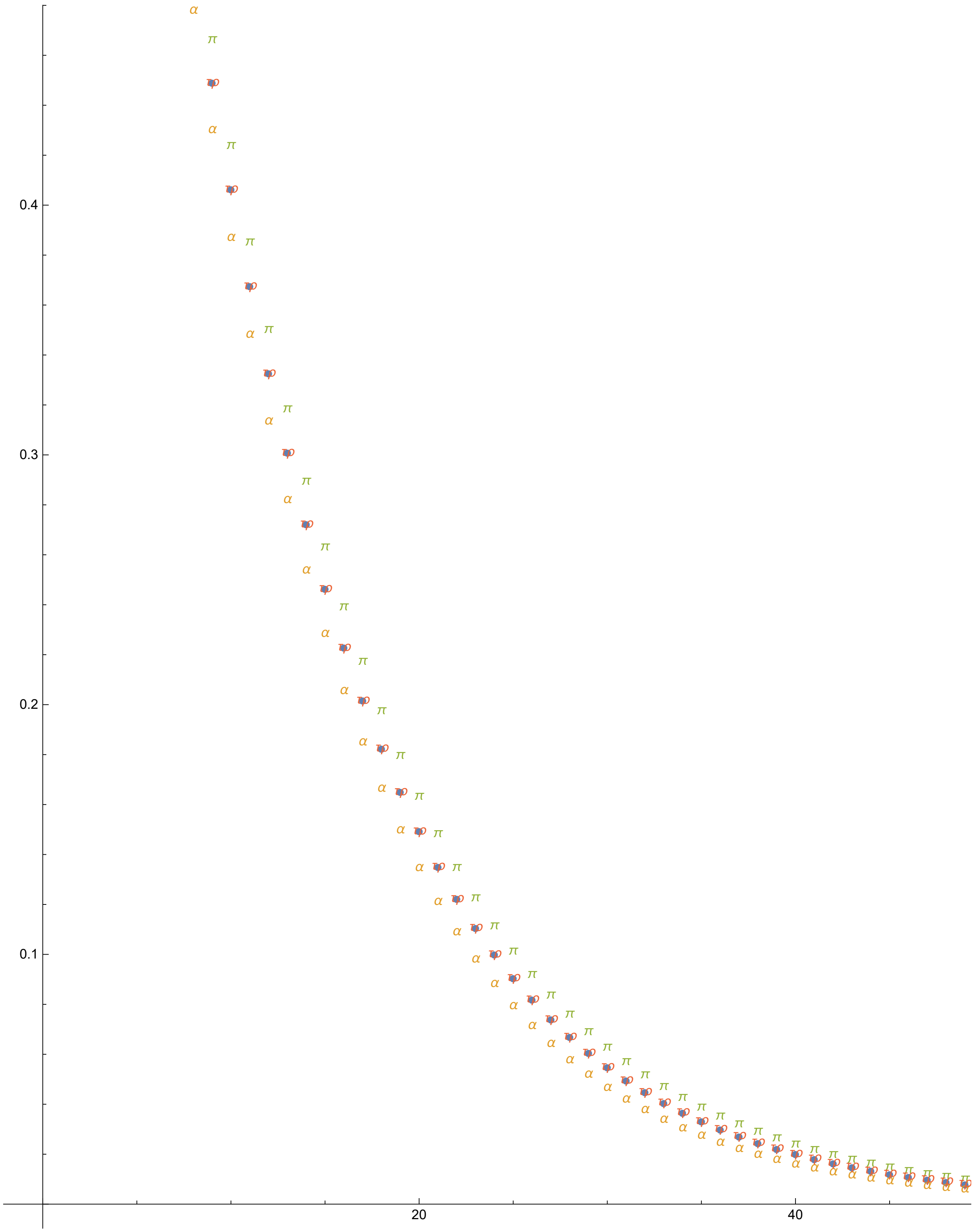
ΜΕ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

ytrap

{1, 0.904762, 0.818594, 0.740633, 0.670096, 0.606278, 0.548537, 0.496295, 0.449029, 0.406264, 0.367573, 0.332566, 0.300893, 0.272236, 0.246309, 0.222851, 0.201627, 0.182425, 0.165051, 0.149332, 0.13511, 0.122242, 0.1106, 0.100067, 0.0905364, 0.0819139, 0.0741126, 0.0670542, 0.0606681, 0.0548902, 0.0496626, 0.0449328, 0.0406535, 0.0367817, 0.0332787, 0.0301093, 0.0272418, 0.0246473, 0.0222999, 0.0201761, 0.0182546, 0.0165161, 0.0149431, 0.01352, 0.0122323, 0.0110674, 0.0100133, 0.00905967, 0.00819684, 0.00741619, 0.00670989, 0.00607085, 0.00549268, 0.00496956, 0.00449627, 0.00406806, 0.00368062, 0.00333009, 0.00301293, 0.00272599, 0.00246637, 0.00223148, 0.00201896, 0.00182668, 0.00165271, 0.00149531, 0.0013529, 0.00122405, 0.00110747, 0.001002, 0.00090657, 0.00082023, 0.000742113, 0.000671436, 0.000607489, 0.000549633, 0.000497287, 0.000449927, 0.000407076, 0.000368307, 0.00033323, 0.000301494, 0.00027278, 0.000246801, 0.000223296, 0.00020203, 0.000182789, 0.000165381, 0.00014963, 0.00013538, 0.000122486, 0.000110821, 0.000100267, 0.0000907174, 0.0000820776, 0.0000742607, 0.0000671883, 0.0000607894, 0.0000549999, 0.0000497618, 0.0000450226}

Γραφηκά αν τα δούμε αυτά :

```
ListPlot[{y, yexpl, yimp, ytrap}, PlotMarkers → {{•, Medium}, α, π, τρ}]
```



Με [α] είναι οι τιμές της άμεσης , με[π] της πεπλεγμένης ,
με [τρ] του τραπεζίου και με [•] η τιμή της αναλυτικής. Όπως λοιπόν
περιμέναμε η μέθοδος τραπεζίου κάνει και την καλύτερη προσέγγιση.

Για να υπολογίσουμε τα σφάλματα αρκέι να αφαιρέσουμε απο την
αναλυτική τη προσέγγισή μας. Το απόλυτο της διαφοράς είναι το σφάλμα.

ΤΗΣ ΑΜΕΣΗΣ EULER

```
dn1 = Abs[y - yexpl]
```

```
{0., 0.00483742, 0.00873075, 0.0118182, 0.01422, 0.0160407, 0.0173706, 0.0182884,
 0.0188618, 0.0191492, 0.019201, 0.0190605, 0.0187647, 0.0183452, 0.017829,
 0.017239, 0.0165945, 0.0159117, 0.0152043, 0.0144834, 0.0137586, 0.0130374,
 0.0123261, 0.0116295, 0.0109515, 0.0102952, 0.00966276, 0.00905578, 0.0084753,
 0.00792193, 0.00739591, 0.00689716, 0.00642537, 0.00598001, 0.00556043,
 0.00516583, 0.00479532, 0.00444797, 0.00412277, 0.00381871, 0.00353476,
 0.00326988, 0.00302306, 0.0027933, 0.0025796, 0.00238103, 0.00219667, 0.00202563,
 0.00186706, 0.00172017, 0.00158417, 0.00145835, 0.00134201, 0.00123449,
 0.00113519, 0.00104352, 0.000958936, 0.000880931, 0.000809024, 0.000742767,
 0.000681742, 0.000625558, 0.000573852, 0.000526284, 0.000482539, 0.000442323,
 0.000405363, 0.000371407, 0.000340221, 0.000311587, 0.000285303, 0.000261184,
 0.000239057, 0.000218763, 0.000200154, 0.000183096, 0.000167462, 0.000153137,
 0.000140013, 0.000127994, 0.000116988, 0.000106912, 0.0000976892, 0.0000892489,
 0.0000815262, 0.0000744614, 0.0000679995, 0.0000620901, 0.000056687, 0.0000517474,
 0.0000472325, 0.0000431062, 0.0000393357, 0.0000358909, 0.0000327441,
 0.0000298699, 0.000027245, 0.0000248481, 0.0000226597, 0.000020662, 0.0000188385}
```

ΤΗΣ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ EULER

```
dn2 = Abs[y - yimp]
```

{0., 0.00425349, 0.00771553, 0.0104966, 0.0126934, 0.0143907, 0.0156623, 0.0165728, 0.0171784, 0.017528, 0.0176638, 0.0176228, 0.0174366, 0.0171326, 0.0167343, 0.0162619, 0.0157326, 0.0151611, 0.0145599, 0.0139394, 0.0133083, 0.0126741, 0.0120428, 0.0114193, 0.0108076, 0.010211, 0.00963187, 0.00907217, 0.00853329, 0.00801619, 0.00752148, 0.00704948, 0.00660024, 0.0061736, 0.00576924, 0.00538672, 0.00502546, 0.00468482, 0.00436409, 0.00406251, 0.00377929, 0.00351362, 0.00326469, 0.00303169, 0.00281379, 0.00261022, 0.00242018, 0.00224291, 0.0020777, 0.00192382, 0.0017806, 0.00164739, 0.00152356, 0.00140852, 0.0013017, 0.00120258, 0.00111064, 0.0010254, 0.000946412, 0.000873252, 0.000805518, 0.000742833, 0.000684842, 0.000631216, 0.000581644, 0.000535834, 0.000493517, 0.000454438, 0.000418361, 0.000385066, 0.000354346, 0.000326012, 0.000299884, 0.000275797, 0.000253598, 0.000233144, 0.000214301, 0.000196948, 0.00018097, 0.000166261, 0.000152723, 0.000140266, 0.000128806, 0.000118264, 0.00010857, 0.0000996566, 0.0000914624, 0.0000839307, 0.0000770092, 0.0000706495, 0.000064807, 0.0000594404, 0.0000545117, 0.0000499858, 0.0000458305, 0.000042016, 0.0000385147, 0.0000353015, 0.0000323529, 0.0000296476, 0.0000271658}

ΤΟΥ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

```
dn3 = Abs[y - ytrap]
```

{0., 0.0000755133, 0.000136649, 0.00018546, 0.000223738, 0.000253048, 0.000274749, 0.000290025, 0.000299903, 0.000305271, 0.000306899, 0.00030545, 0.000301496, 0.000295526, 0.000287961, 0.000279157, 0.00026942, 0.000259007, 0.000248134, 0.000236985, 0.000225709, 0.000214433, 0.000203258, 0.000192267, 0.000181527, 0.000171089, 0.000160993, 0.000151269, 0.000141937, 0.000133012, 0.000124499, 0.000116401, 0.000108717, 0.000101441, 0.0000945655, 0.0000880793, 0.0000819711, 0.0000762277, 0.0000708348, 0.000065778, 0.0000610419, 0.0000566115, 0.0000524714, 0.0000486065, 0.0000450019, 0.0000416431, 0.000038516, 0.0000356068, 0.0000329025, 0.0000303904, 0.0000280584, 0.000025895, 0.0000238892, 0.0000220306, 0.0000203094, 0.0000187162, 0.0000172423, 0.0000158794, 0.0000146198, 0.000013456, 0.0000123814, 0.0000113894, 0.000010474, 9.62975×10^{-6}, 8.8513×10^{-6}, 8.13378×10^{-6}, 7.47267×10^{-6}, 6.86371×10^{-6}, 6.30297×10^{-6}, 5.7868×10^{-6}, 5.31177×10^{-6}, 4.87475×10^{-6}, 4.47279×10^{-6}, 4.10319×10^{-6}, 3.76342×10^{-6}, 3.45116×10^{-6}, 3.16424×10^{-6}, 2.90068×10^{-6}, 2.65862×10^{-6}, 2.43636×10^{-6}, 2.23232×10^{-6}, 2.04505×10^{-6}, 1.8732×10^{-6}, 1.71554×10^{-6}, 1.57092×10^{-6}, 1.43829×10^{-6}, 1.31668×10^{-6}, 1.20518×10^{-6}, 1.10298×10^{-6}, 1.00932×10^{-6}, 9.23492×10^{-7}, 8.44859×10^{-7}, 7.72829×10^{-7}, 7.06856×10^{-7}, 6.4644×10^{-7}, 5.91121×10^{-7}, 5.40476×10^{-7}, 4.94117×10^{-7}, 4.51686×10^{-7}, 4.12855×10^{-7}, 3.77325×10^{-7}}

Τα *μέγιστα σφάλματα για τις* 3 *μεθόδους είναι αντίστοιχα*

```
Max[dn1]
Max[dn2]
Max[dn3]
```

```
0.019201

0.0176638

0.000306899
```